Conteo

by Dr. Gary MacGillivray*

La mejor forma de aprender a contar es resolver muchos problemas. Lo que trataré de hacer aquí es bosquejar las técnicas y principios rectores.

*Fuente: (c)Dr. Gary MacGillivray (c. 2016) **Counting.** Mathematics and Statistics Department, University of Victoria, Canada. Dirección URL http://www.math.uvic.ca/faculty/-gmacgill/guide/counting.pdf (Acceso: 2019.09.11)

Traducción: E. Cómer-Barragán, Departamento de Ciencias Básicas, Instituto Tecnológico de Tijuana, TecNM, México. [versión 2019.09.11] *Autorización del autor en proceso.*

1 Regla de Adición

El número de resultados de un proceso, el cual consiste de una colección de casos mutuamente exclusivos, es la suma del número de resultados de cada caso.

2 Regla del Producto

El número de resultados de un proceso, el cual es una secuencia de pasos, es el producto del número de resultados de cada pasos, *siempre y cuando, en cada paso, el número de resultados no cambie en función de los resultados en un paso previo.*

La parte cursiva es importante. Si encuentras una situación donde el número de resultados en el paso actual, depende del resultado de un paso previo, entonces probablemente necesitas ya sea, re-ordenar los pasos, o dividir alguna parte del proceso en casos. Como un ejemplo, trata de contar la cantidad de números pares entre 1000 y 9999 inclusive que tienen dígitos distintos. (Resp. $9 \times 8 \times 7 \times 1 + 8 \times 8 \times 7 \times 4$.)

Cuando cuento el número de forma para hacer algo, imagino que lo hago como una secuencia de pasos. En el ejemplo anterior, imagino que construyo el número llenando cada uno de los dígitos (4 pasos). Usualmente, uno debe hacer una selección cuidadosa del orden de los pasos. Aquí, es sabio "llenar" primero el dígito de las unidades.

---

3 Selecciones forzadas

Cuando el resultado de un paso está predeterminado, el número de resultados de ese paso es 1. Por ejemplo, la cantidad de números entre 1000 y 9999 inclusive que terminan en 7 es $9 \times 10 \times 10 \times 1$.

---

4 Contando el complemento

Algunas veces es más fácil contar el número de resultados que no quieres, y luego restarlo del total de posibles resultados. Esta técnica es útil en problemas con "al menos" o "a lo más". Como un ejemplo, trata de contar la cantidad de números entre 1000 y 9999 inclusive que tengan al menos un cero. (Resp. $9 \times 10^3 - 9^4$.)

Otra manera de tratar con problemas que involucran "al menos k" or "a lo más k" es dividir en casos. En el ejemplo previo, uno podría considerar los tres casos: exactamente un 0, exactamente dos $0s$, y exactamente tres $0s$. (Resp. $3 \times 1 \times 9^3 + 3 \times 9 \times 1 \times 1 \times 9 + 9 \times 1 \times 1 \times 1$.)

---

5 Inclusión-Exclusión

El número de resultados donde A o B ocurre, es el número donde sucede A, más el número donde sucede B, menos el número donde tanto A como B suceden. Por ejemplo, trata de contar la cantidad de números entre 1000 y 9999 inclusive que son divisibles entre 7 u 11. (Resp. $(\lfloor \frac{9999}{7} \rfloor - \lfloor \frac{999}{7} \rfloor) + (\lfloor \frac{9999}{11} \rfloor - \lfloor \frac{999}{11} \rfloor) - (\lfloor \frac{9999}{77} \rfloor - \lfloor \frac{999}{77} \rfloor)$.)

El principio anterior se obtiene del siguiente hecho sobre conjuntos: Para conjuntos finitos X y Y,

$$|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|.$$

Para ver la correspondencia, considere X como el conjunto de resultados donde sucede A, y a Y como el conjunto de resultados donde sucede B.

6 Pegamento

Este se utiliza en problemas de reacomodos donde quieres que varios objetos esten juntos. Primero, los pegas (y cuentas el número de formas). Luego acomodas los objetos pegados y los otros objetos (y cuentas las formas). Por ejemplo, supongamos que hay 3 niños y 4 niñas en fila para una foto, y quieres contar el número de acomodos en los cuales los niños van juntos. Primero, pegas a los niños: hay $3 \times 2 \times 1$ posibles formas. Ahora, acomodas los cinco elementos que tienes (las 4 niñas, y un objeto consistente de los 3 niños pegados) en una fila: $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ formas. Así que el número total de reacomodos es $3 \times 2 \times 1 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$.

7 Sobreconteo

Si puedes determinar un procedimiento para contar todos los objetos que quieres, el mismo número de veces, digamos k, entonces el número de objetos distintos es igual al número de resultados del procedimiento, dividido entre k. Como un ejemplo, trata de contar el número de reacomodos de la palabra en PEPPER. Temporalmente, llama a las Ps: P_1, P_2 y P_3, y las Es como E_1y E_2. Entonces tenemos 6 objetos distintos, así que el número de reacomodos es $6!$. Ahora borra los subíndices de las Ps y las Es, y cada reacomodo de las letras se presenta $3!2!$ veces (para cada acomodo fijo de PEPPER, hay $3!2!$ formas de llamar las Ps P_1, P_2 y P_3, y las Es E_1y E_2). Así que el número de reacomodos de las letras en PEPPER es $\frac{6!}{3!2!}$.

8 De n escoge k

Para enteros $n \geq k \geq 0$, definimos $\binom{n}{k}$ (que leemos: de n escoge k) como el número de formas de seleccionar una colección de k objetos distintos de una colección

> *N. del T.* Normalmente $\binom{n}{k}$ se lee: n sobre k, aunque más propiamente se podría leer: de n,

de n objetos distintos, *sin considerar el orden en que son seleccionados.*

k (para facilitar su correcta interpretación).

Resulta que $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$. Deberías de poder obtener esta fórmula.

Realizas esto contando el número de formas de alinear k de n personas en dos formas distintas: ya sea seleccionando primero las k y luego alineandolas, o construyendo la alineación de izquierda a derecha seleccionando la siguiente persona, de entre aquellas no alineadas todavía.

$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$, y en general $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = 1$. Deberías de poder explicar cada una de estas [ecuaciones] sin recurrir a la fórmula $\binom{n}{k}$. La clave para la última es que decidir cuáles objetos tomar de una colección, es equivalente a decidir cuáles objetos dejar.

9 Triángulo de Pascal

Si $n \geq k \geq 1$ entonces $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$. Deberías poder demostrarlo sin utilizar la fórmula para $\binom{n}{k}$. Para hacer esto, cuenta el número de formas de seleccionar k niños de n para un viaje en dos maneras. La primera manera es simplemente seleccionar los k niños, y la segunda es contar el número de colecciones que incluyen Gary, y el número que no.

10 Acomodo de objetos cuando no todos son distintos: otra manera

Primero determina (por ti mismo) el número de objetos de cada tipo. Luego, escoge qué lugares contendrán los objetos del primer tipo, cuáles de los lugares restantes contendrán objetos del segundo tipo, y así hasta llenar todos los lugares. Como un ejemplo, el número de reacomodos de las letras en PEPPER es $\binom{6}{3}\binom{3}{2}\binom{1}{1}$. Cuando se expande utilizando la fórmula para $\binom{n}{k}$ y se simplifica, esto es igual a $\dfrac{6!}{3!2!1!}$.

En general, si tienes n objetos, de los cuales n_1 son de tipo 1, n_2 son de tipo 2,..., n_t son de tipo t, entonces contar como antes, escogiendo el número de lugares que mantendran a los objetos de cada tipo y simplificando, implica que el número de reacomodos es

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_t!}.$$

11 Separación

Para contar el número de resultados donde dos objetos de cierto tipo no estan juntos, primero acomoda los otros objetos (y cuenta las maneras), y luego escoge cuáles de los lugares "intermedios" (sin olvidar el inicio y el final) contendrán los objetos que quieres separados. Como un ejemplo, el número de reacomodos de las letras en STATISTICS en los cuales no hay dos Ss adyacentes es $\frac{7!}{3!2!}\binom{8}{3}$.

12 Algunas cosas en orden fijo

Para contar el número de reacomodos [o reordenamientos] de objetos en los cuales, algunos de ellos ("los especiales") deben aparecer en un orden particular, primero cambia "los especiales" a cajas vacías y reacomoda los objetos restantes y las cajas (y cuenta las maneras). Luego, llena las cajas con los objetos especiales en el orden deseado (y cuenta las maneras). Como un ejemplo, para contar el número de ordenamientos de ABELIAN en los cuales las vocales aparecen en el orden alfabético, primero cambia las vocales a cajas, y ordena las cuatro cajas y B, L, N: $\frac{7!}{4!}$ maneras. Ahora, lleva las cajas con A,A,E,I en el orden deseado: 1 manera. Este número de ordenamientos es $\frac{7!}{4!}$.

13 Reacomodo de objetos en un círculo

Aquí deseas conocer el número de maneras de reacomodar una colección de objetos alrededor de un círculo, sujeto a la condición de que los reacomodos que difieran por una rotación del círculo, sean considerados iguales. Determina el número de espacios que deben ser llenados, y el número de maneras para llenarlos. Esto cuenta cada reordenamiento un cierto número de veces, así que hay que dividir (como en sobreconteo, arriba). Por ejemplo, el número de formas de sentar a n personas alrededor de una mesa circular es $\frac{n!}{n} = (n-1)!$. Este método se generaliza a ordenar objetos alrededor de otras formas (p. ej. cuadrados), y a permitir equivalencias bajo otras simetrías, como *flips*. Hay otro método que consiste en girar el círculo hasta que un cierto objeto está en la parte superior–esto impone entonces un orden para los demás objetos–pero el método no se generaliza a otras figuras.

---

14 Selección de objetos cuando no todos son distintos

La premisa básica es que el número de soluciones enteras no-negativas para $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_k = n$ es igual al número de maneras de colocar n bolas idénticas en k cajas etiquetadas, lo cual es igual al número de sucesiones de n estrellas (*) y $k-1$ barras (|). La correspondencia con el primer caso es permitir que x_i sea igual al número de bolas en la caja i, $1 \leq i \leq k$, y con el último caso, es permitir que el número de estrellas antes de la primer barra sea igual al número de bolas en la caja 1, el número de estrellas entre la primera y segunda barra, sea igual que el número de bolas en la caja 2, el número de estrellas entre la segunda y tercera barra, sea igual que el número de bolas en la caja 3, y así hasta que finalmente, el número de estrellas después de la última barra, sea igual al número de bolas en la caja k. Tu puedes imaginar las n estrellas como las bolas, y los k espacios creados por las $k-1$ barras (incluyendo los extremos) como las k cajas. El número de soluciones es entonces el número de reordenamientos de estos $n+k-1$ objetos no todos distintos, y es $\frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!} = \binom{n+k-1}{n} = \binom{n+k-1}{k-1}$.

Por ejemplo, considera contar el número de maneras de ordenar 12 sodas, seleccionadas de Coke, Pepsi, Montain Dew, y Ginger Ale. Todo lo que importa aquí es cuántas bebidas de cada tipo se ordenan. Sea x_1 igual al número de Cokes ordenadas, x_2 el número de Pepsis ordenadas, x_3 igual al número de Mountain Dews ordenadas, y x_4 igual al número de Ginger Ales solicitadas. Ya que cada uno de estos números son no-negativos, queremos el número de soluciones enteras de $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$, sujeto a $x_i \geq 0$ para $0 \leq i \leq 4$. Hay $\frac{(12+3)!}{12!3!}$ de estas.

Para tratar con el conteo del número de soluciones enteras no-negativas de desigualdades como $x_1 + x_2 + \cdots + x_k \leq n$, introducimos una nueva variable x_{k+1} (llamada *variable de holgura*) cuyo valor será $n - (x_1 + x_2 + \cdots + x_k)$ (i.e. la holgura en la desigualdad). Hay entonces una correspondencia 1-1 entre las soluciones enteras no-negativas para $x_1 + x_2 + \cdots + x_k \leq n$ y las soluciones enteras no-negativas para $x_1 + x_2 + \cdots + x_{k+1} = n$.

Para tratar con restricciones sobre las variables, distintas a la no-negatividad, convierte la ecuación a una que sólo tenga la condición de no-negatividad. Por ejemplo, el número de soluciones enteras para $x_1 + x_2 + x_3 = 15$ sujeta a $x_1 \geq -1,\ x_2 > 4,\ x_3 \geq 2$, es igual al número de soluciones en enteros para

$$(x_1 + 1) + (x_2 - 5) + (x_3 - 2) = 15 + 1 - 5 - 2,$$

sujeta a

$$x_1 + 1 \geq -1 + 1,\ x_2 - 5 > 4 - 5,\ x_3 - 2 \geq 2 - 2.$$

Sea $y_1 = x_1 + 1,\ y_2 = x_2 - 5$, y $y_3 = x_3 - 2$. Entonces el problema se convierte en contar el número de soluciones enteras para $y_1 + y_2 + y_3 = 9$ sujeta a $y_i \geq 0,\ 1 \leq i \leq 3$.

Nota del traductor

La edición de este documento se realizó gracias al lenguaje Scribble bajo el ambiente DrRacket. Agradecemos al equipo de desarrollo del lenguaje Racket por estas excelentes herramientas. Para notificar errores, favor de dirigirse a: comer (at) cemati.org